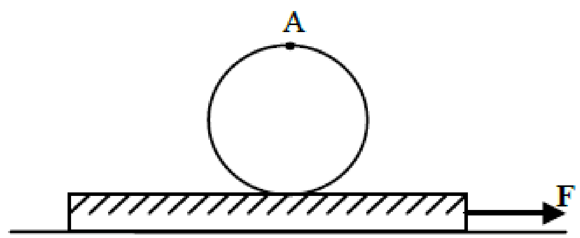
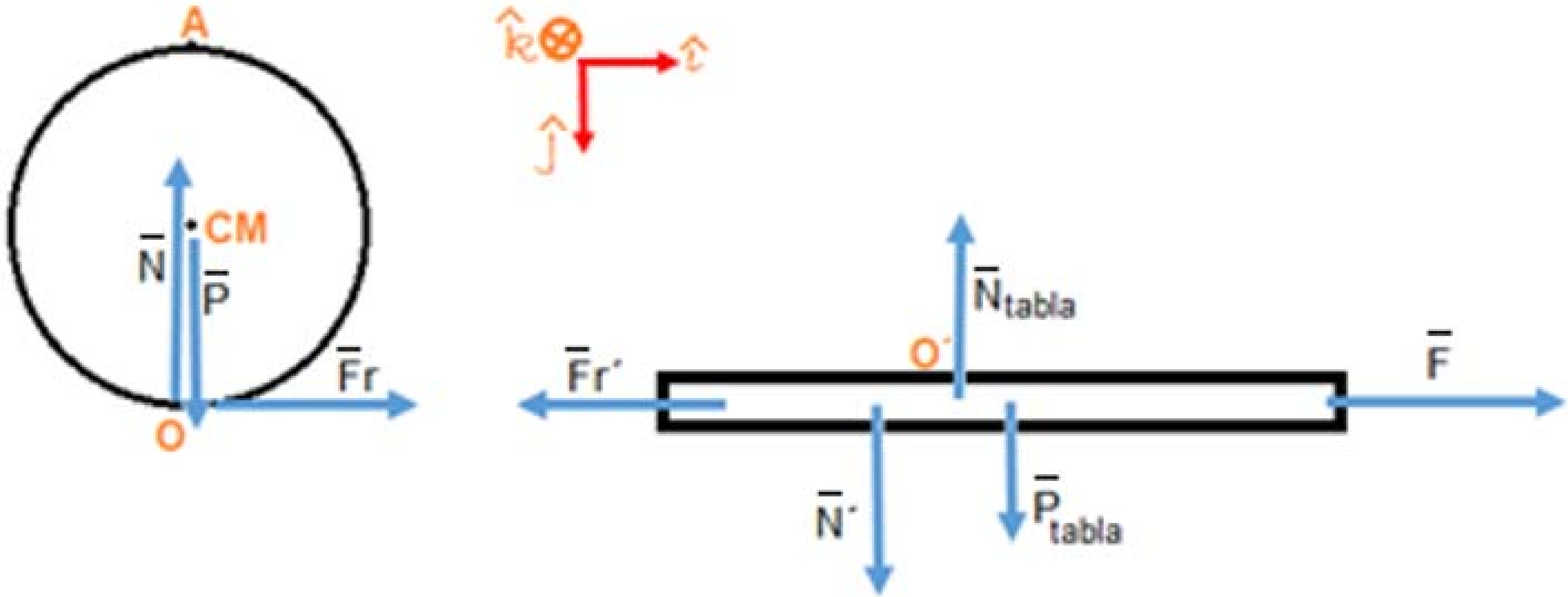
19. Un cilindro de masa M y radio R se encuentra apoyado encima de una tabla de masa m sobre la que actúa una fuerza F, como indica la figura. El rozamiento entre la tabla y el piso es despreciable y entre el cilindro y la tabla es tal que el cilindro rueda sin resbalar. Si el sistema parte del reposo:



- Calcular la aceleración angular del cilindro.
- Determinar la velocidad angular del cilindro cuando la tabla se desplazó una distancia d.
- Escribir la velocidad y aceleración del punto A cuando la tabla se desplazó una distancia d.

DCL



Ecuaciones de movimiento

$$\sum \bar{F} = m\, \bar{a}_{CM}$$

Para la tabla:

$$\hat{\imath}\ :\ |F| - |Fr| = m\, a_{tx} \qquad (1)$$

Y para el cilindro:

$$\hat{\imath}\ :\ |Fr| = M\, a_{CMx} \qquad (2)$$

Ecuaciones de movimiento

$$\sum \bar{\tau}_{CM} = I_{CM}\,\bar{\gamma}$$

$$\hat{k}\ :\ -|Fr|R = \frac{1}{2}MR^2\,\gamma \qquad (3)$$

Ecuaciones de vínculo

Sabemos que el cilindro **rueda sin deslizar**, esto significa que **la velocidad del punto del cilindro que está en contacto con la tabla (punto O) relativa a la tabla es nula**. Esta condidición de rodadura, en el SRI, se escribe:

$$\bar{v}_O = \bar{v}_{O'} \equiv \bar{v}_T \qquad (4)$$

Siendo:

O: punto del cilindro en contacto con la tabla

O´: punto de la tabla en contacto con el cilindro

Por condición de rodadura la velocidad de ambos puntos en contacto es igual.

$$\bar{a}_{Ox} = \bar{a}_T \qquad (5)$$

Notar que la igualdad entre aceleraciones involucra solo una componente de la aceleración del punto O. El punto O tiene aceleración tangencial ($\hat{\imath}$) y normal ($\hat{\jmath}$):

$$\bar{a}_O = a_{Ox}\,\hat{\imath} + a_{Oy}\,\hat{\jmath}$$

Ecuaciones de vínculo

$$\bar{a}_O = \bar{a}_{CM} + \bar{\gamma} \times (\bar{r}_O - \bar{r}_{CM}) + \vec{\Omega} \times \vec{\Omega} \times (\bar{r}_O - \bar{r}_{CM}) \qquad (6)$$

Trabajemos con cada uno de los términos de la ecuación (6),

$$\bar{a}_{CM} = a_{CMx}\ \hat{\imath}$$

$$\bar{\gamma} \times (\bar{r}_O - \bar{r}_{CM}) = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & R & 0 \end{bmatrix} = -R\gamma\ \hat{\imath}$$

$$\vec{\Omega} \times \vec{\Omega} \times (\bar{r}_O - \bar{r}_{CM}) = \vec{\Omega} \times \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \Omega \\ 0 & R & 0 \end{bmatrix} = \vec{\Omega} \times \left(-R\,\Omega\right) \hat{\imath} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \Omega \\ -R\,\Omega & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= -R\,\Omega^2\ \hat{\jmath}$$

$$a_{Tx} = a_{CMx} - R\gamma \qquad (8)$$

Entonces

$$|F| - |Fr| = m\, a_{tx}$$

$$|Fr| = M\, a_{CMx}$$

$$-|Fr| = \frac{1}{2} MR\, \gamma$$

$$a_{Tx} = a_{CMx} - R\gamma$$

$$\bar{a}_{CM} = \frac{|F|}{(M+3m)}\ \hat{\imath}$$

$$\bar{F}_r = \frac{M\,|F|}{M + 3m}\ \hat{\imath}$$

$$\bar{\gamma} = \frac{-2|F|}{R\,(M + 3m)}\ \hat{k}$$

$$\bar{a}_t = \frac{3|F|}{(M + 3m)}\ \hat{\imath}$$